EPREUVE DE MATHEMATIQUES **Durée : 4 heures**

Les deux problèmes sont indépendants et devront être obligatoirement traités tous les deux.

Aucune calculatrice ni tables numériques ne sont autorisées.

- Premier Problème (15-points) -

On désigne par :

a et b deux nombres réels où b > a.

I l'intervalle fermé [a,b]

n un entier strictement positif

C l'espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle définies et continues sur I.

On se donne dans **C** deux systèmes libres de n fonctions φ_k (k = 1, 2, ..., n) et ψ_k (k = 1, 2, ..., n).

On pose pour tout couple (x,y) de variables réelles indépendantes de I :

$$K(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \cdot \psi_k(y)$$

Soit μ un réel non nul et g une fonction donnée dans **C** . Toute fonction f de **C** vérifiant quel que soit x de I l'équation (E) :

$$(E) \qquad f(x) - \frac{1}{\mu} \int_a^b K(x,y)\, f(y)\, dy = g(x)$$

est appelée solution de (E).

On désigne respectivement par (E_0) l'équation homogène associée à (E) et par (E'_0) son équation homogène transposée, les équations définies par :

$$(E_0) \qquad f_0(x) - \frac{1}{\mu} \int_a^b K(x,y)\, f_0(y)\, dy = 0$$

$$(E'_0) \qquad h_0(y) - \frac{1}{\mu} \int_a^b K(x,y) h_0(x)\, dx = 0$$

ou f_0 et h_0 désignent des fonctions inconnues dans **C** .

I. - On pose :

$$m_{pq} = \int_a^b \varphi_p(y)\, \psi_q(y)\, dy$$

$$g_q = \int_a^b g(y)\, \psi_q(y)\, dy$$

1°) - Montrer que si f est solution de (E), f-g s'écrit :

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \qquad (k = 1,2,\ldots\ldots,n)$$

où les a_k (k = 1, 2, ..., n) sont solutions du système d'équations linéaires (S) associé à (E) :

$$(S) \qquad a_k - \frac{1}{\mu} \sum_{p=1}^{n} a_p\, m_{pk} = g_k \qquad (k = 1,2,\ldots\ldots,n)$$

Examiner la réciproque.

2°) - Dans la suite du problème on désigne par (S_0) le système d'équations linéaires associé à (E_0).

Expliciter (S_0).

3°) - Montrer que toute solution de (E'_0) est de la forme :

$$h_0(y) = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{n} b_j\, \psi_j(y)$$

Ecrire le système d'équations linéaires (S'_0) associé à (E'_0) dont les réels b_j (j = 1, 2, ..., n) sont solutions.

4°) - Montrer que (S_0) et (S'_0) ont même rang.

II. - Soit A l'application linéaire définie sur **C** par :

$$[A(F)](x) = \int_a^b K(x,y)\, F(y)\, dy \qquad \text{pour tout } F \text{ de } \mathbf{C}$$

Tournez la page S. V. P.

On dira qu'une valeur reelle λ et une fonction F_λ de C non nulle sont respectivement valeur propre et fonction propre associees de A si :

$$A(F_\lambda) = \lambda F_\lambda$$

1°) - Démontrer que (E) admet une solution unique si et seulement si μ n'est pas valeur propre de A.

2°) - On suppose que μ est une valeur propre λ non nulle de A.

2.1.) - Soit r le rang du système (S'_0). Alors il existe (n-r) solutions linéairement indépendantes de (S'_0) que l'on note :

$$b_1^{(l)}, b_2^{(l)}, \ldots, b_n^{(l)} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n-r),$$

montrer que (S) admet des solutions si et seulement si :

$$\sum_{p=1}^{n} b_p^{(l)} g_p = 0 \qquad \text{pour tout } l\ (l = 1, 2, \ldots, n-r)$$

2.2) - En conclure que :

2.2.1.) - Posant :

$$h_0^{(l)}(y) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} b_k^{(l)} \varphi_k(y) \qquad (l = 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots,n-r)$$

l'équation (E) admet des solutions si et seulement si :

$$(R) \qquad \int_a^b g(y)\, h_0^{(l)}(y)\, dy = 0 \quad \text{pour tout } l\ (l = 1,2,\ldots\ldots\ldots,n-r)$$

2.2.2.) - Dans l'hypothèse où les relations (R) sont vérifiées, montrer que la solution générale de (E) est égale à la somme d'une solution particulière de cette équation et d'une combinaison linéaire des fonctions propres indépendantes associées à la valeur propre λ .

III. - APPLICATION

Soit $a = -\pi$ et $b = \pi$

On pose:

$K(x,y) = \cos[\gamma(x-y)]$ où γ est un réel non nul.

3.1) - Déterminer les valeurs propres et les fonctions propres associees de l'application linéaire A définie sur C par :

$$[A(F)](x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos[\gamma(x-y)]\, F(y)\, dy$$

pour tout F de C .

3.2) - Si μ (réel non nul) n'est pas une valeur propre de A, donner la solution générale de l'équation (ε) :

$$(\varepsilon) \qquad f(x) - \frac{1}{\mu} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos[\gamma(x-y)]\, f(y)\, dy = 1$$

3.3) - Si μ est une valeur propre λ (non nulle) de A, discuter l'existence des solutions pour (ε).

Supposant de plus $\gamma = 1$, donner lorsqu'elle existe, la solution générale de (ε). (On remarquera qu'il existe un réel, que l'on déterminera, solution particulière de (ε)).

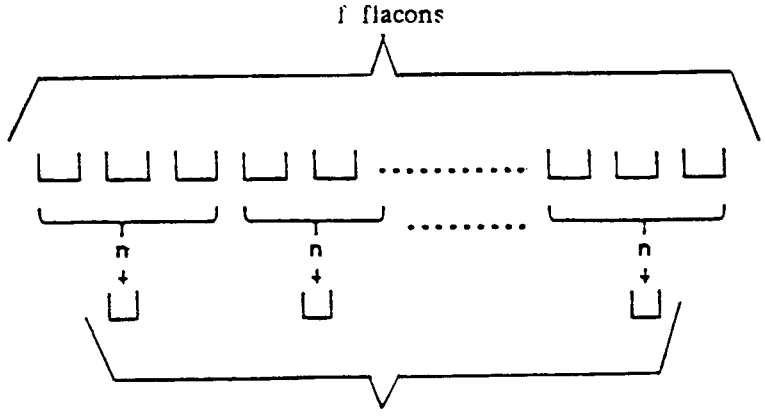
* * *

Tournez la page S. V. P.

- Deuxième Problème (5 points) -

Dans une fabrication de produits chimiques, on s'est aperçu que parmi les f flacons d'un produit *P* certains contiennent une impureté */* rendant ce produit inutilisable. On se propose donc de rechercher les flacons défaillants, compte tenu du fait que la probabilité p qu'un flacon contienne l'impureté */* est indépendante du flacon considéré.

Pour cela, on utilise la méthode suivante : de chacun des flacons, on extrait un échantillon, et les f échantillons ainsi obtenus sont répartis en g groupes de n éléments suivant le schéma suivant :



g groupes (mélanges) de n echantillons

n = f/g (n, f et g etant des entiers)

Dans chaque groupe, on analyse le mélange des n échantillons. Ainsi, si le melange ne contient pas */*, une seule analyse aura établi qu'aucun des n échantillons (donc des n flacons correspondants) dans le groupe considéré ne contient d'impuretés. Mais par contre, si le mélange contient */*, il faudra analyser chacun des n flacons (constituant le groupe considéré) séparément afin de déterminer ceux qui sont impurs ; le nombre d'analyses faites pour discriminer ce groupe est alors n + 1.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'analyses effectuées pour discriminer les f flacons, et on associe à chacun des g groupes (supposés indépendants) l'évènement (A) tel que :

(A) = (Un des échantillons ***au moins*** du groupe considéré contient l'impureté */*)

dont la probabilité de réalisation est notée p_A.

On désigne par $(\bar{A})$ l'événement contraire de (A) et par $p_{\bar{A}}$ sa probabilité de réalisation.

On définit par Y la variable aléatoire, égale au nombre de réalisations de l'événement (A) dans la série des g groupes.

1°) - Démontrer que la variable Y suit une loi binomiale dont on précisera les parametres.

2°) - Montrer que les variables aléatoires X et Y sont liées par la relation :

$$X = g + n\,Y$$

3°) - On pose : $q = 1 - p$

Evaluer $p_{\bar{A}}$, puis p_A en fonction de n et q.
En déduire que :

$$E(X) = f.\left[\frac{1}{n} + 1 - q^n\right]$$

ou, E(X) désigne la moyenne (ou espérance mathematique) de la variable aléatoire X.

4°) - **APPLICATION** :

On donne : p = 0.01
f = 120 flacons

Determiner la valeur n_0 de n rendant E(X) minimale.

Quelle est la valeur de E(X) à ce minimum ?

Conclusion.

• • •